周期系におけるBloch波の包絡ソリトンII(流体の非線形波動現象の数理とその応用)

飯塚, 剛

数理解析研究所講究録
908 巻 1995 年 134-147

周期系におけるBloch波の包絡ソリトンII*

飯塚　剛 (Takeshi Iizuka)† 愛媛大理

1　序論

不均一系におけるソリトン現象はこれまで、以下のような種々の条件下で調べられてきた。
1) 局所的な不均一性によるソリトン散乱 [2]
2) 緩やかな不均一性によるソリトン増幅、減衰、分裂 [3]
3) 弱不均一系でのソリトン変形 [4]
4) パラメトリックな力によるソリトンのトラッピング、ソリトン列の発生 [5]

1) はここでは触れない。2),3) では系の不均一性を特徴付ける長さが、ソリトンの特徴的波長に比べて十分長いという仮定があり、4) では2つ長さが同程度であるという仮定が課せられている。結果的に、2)~4) では、不均一性と非線形性と分散性の3つの効果の競合を表わすモデル方程式に帰着される。それでは「系の不均一性を特徴付ける長さが、ソリトンの特徴的波長に比べて十分短い場合」はどうなるのであろうか?一般的には、モデル方程式に帰着させるのは不可能である。この理由は物理的にいえば、不均一性によって初期波形から短波長モードが励起されて分散効果が強められるからである。このような場合はもちろん、ソリトン現象が観測されるのは不可能であろう。

しかし最近になって、例外的に「不均一性が周期系に分布している場合」(周期系) ソリトン現象がおこる可能性が議論された [1, 6]。つまり (周期系の周期) $\ll$ (ソリトンの波長) という条件下でソリトンが propagate する可能性が、理論的に示されたのである。直観的に考えると、ソリトン波長に比べて十分短い周期の不均一性は、波動に対し頻繁な散乱を招き、結果的にはソリトンを減衰させてしまいそうである。確かに、長波長の弱非線形波動や単色波の変調を考える限り、ソリトンの観測は不可能である。しかしここで発想を変えて、「ブロッホ波の変調」という立場で非線形波動を考えると、状況は一変する。

まずここでいう、ブロッホ波の定義を述べる。量子力学でよく知られている通り、周期ポテンシャル (周期を L とする) の下ではブロッホ波解と呼ばれる波動関数 $Y(x)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ が存在する。ただし x は空間座標、t は時間座標、ω はエネルギー (角振動数) を示し、関数 $Y(x)$ は次の関係を満たす。

$$Y(x+L) = Y(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \tag{1.1}$$

---

*論文 [1] の続編

†e-mail: iizuka@scserv.sci.ehime-u.ac.jp

kは実定数で、波数と呼ばれている。明らかに、ブロッホ波は自由ポテンシャルの下での平面波（単色波）$\exp \mathrm{i}(kx-\omega t)$ の拡張となっている。この描像は量子力学における波動関数に限らず、周期的不均一性を持つ多くの線形化された古典波動系に対しても成立する。例を挙げると、底の深さが周期的に変わる重力深水波、誘電率が周期的に分布する光ファイバー、後で述べる周期的な格子力学系などがあり、(1.1) を満足するような線形解 $Y(x)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ の存在を示すことができる。従って古典波動系に対しても、このような解をブロッホ波と呼ぶことは、混乱を招くことはないであろう。いうまでもなく角振動数ωと波数kはある分散関係で関係づけられ、一般には１つのbranchが１つのバンドに対応するようになっている。

ところで散逸のない波動系において、単色波 $\exp \mathrm{i}(kx-\omega t)$ の非線形効果、分散効果による変調が、非線形シュレディンガー (NLS) 方程式で記述されることはよく知られている。この事実は、光ファイバー、非線形格子、流体、プラズマといった非線形分散系のかなり広い範囲で成立し、ソリトン現象の普遍性の一因となっている。先に述べた、周期系におけるソリトンはこの考え方をブロッホ波にあてはめたものである。つまり周期系の場合、一般に線形化された方程式の解は単色波の代わりにブロッホ波となるので、搬送波として単色波でなくブロッホ波を採用する。結論からいうと、包絡波が均一系の場合と同様に、NLS 方程式に従うことがモデルを用いて証明されたわけだが[1, 6]、この事実は多くの周期系で成立すると考えられる。概略を表示すると次のようになる。

	均一系	周期系
線形波	単色波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ $\omega=\omega(k)$ 分散関係	ブロッホ波 $Y(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 分散関係⇒バンド構造
弱非線形波	単色波の包絡波 ⇓ NLS 方程式	ブロッホ波の包絡波 ⇓ NLS 方程式

この結果は、搬送波がブロッホ波、という意味でこれまで考えられていなかったソリトンの新しい概念を示唆している。

もっとも周期系におけるソリトン現象の研究は、これまで全くなかったわけではない。例えば、誘電率が周期的に分布する光ファイバー中の電磁波では、Gap ソリトンが数値的に見出された [7]。この現象に対する理論的な説明 [8, 9] によれば、やはりブッロホ波の包絡波がNLS 方程式を満たす、という結果を得ている。搬送波としてブロッホ波を採用する、という発想はこの研究ではじめて考えられたようだが、ここではブロッホ波に対して周期性を課している（つまり波数kが限られた離散的な値のみしか考えない）のでこの解析は一般的なものではあるとはいえない。

また Pnevmatikos 達 [10] や Campa 達 [11] は非線形の diatomic 格子系において、optical モードあるいは acoustic モードのゆっくりとした変調が、ＮＬＳ方程式に従うことを示し、ソリトン解から予想される孤立波が進行することも数値的に証明した。また、この系でゼロ波数 $k\to 0$ 極限をとった場合には KdV 方程式が導かれることも知られている [12]。さらに、ヘルムホルツ共鳴器が配置されたトンネルにおける音響波でも、ブロッホ波のゼロ

波長極限の非線形変調として、KdV 方程式が導かれた [13]。これらの結果は、均一系と同様に周期系においてもソリトン現象が普遍であることの傍証となっている、と考えられるが、解析法はいずれも各々のモデルに強く依存しているようである。

これに対して先に述べた解析 [1, 6] では、簡単な力学モデル (周期的非線形 Klein-Gordon 方程式) を扱っているのだが、方法自体は「一般の周期系に適用できる形の逓減摂動法を構築する」という立場をとっている。この解析でもっとも重要なポイントはまず第一に、ブロッホ波の変調を考えることである。つぎに、与えられた1次元の周期的非線形系の波動 $Y(x,t)$ に対して、次のような展開を導入することである。

$$\begin{aligned} y(x,t) =& \varepsilon Y(x,\omega)e^{-i\omega t}U(\xi,\tau) + \varepsilon Y^*(x,\omega)e^{+i\omega t}\overline{U}(\xi,\tau) \\ &+\varepsilon^2 V(x,\omega)e^{-i\omega t}(-i)\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \varepsilon^2 V^*(x,\omega)e^{+i\omega t} i \frac{\partial \overline{U}(\xi,\tau)}{\partial \xi} \\ &+\varepsilon^3 W(x,\omega)e^{-i\omega t}(-1)\frac{\partial^2 U(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + \varepsilon^3 \overline{W}(x,\omega)e^{+i\omega t}(-1)\frac{\partial^2 \overline{U}(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} \\ &+(\text{非線形の補正項}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

ただし、新たな独立変数 ξ,τ は

$$\xi = \varepsilon\left(\frac{dk}{d\omega}x - t\right), \tag{1.3a}$$

$$\tau = \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}x + \varepsilon^2\chi(x,\omega)\right) \tag{1.3b}$$

で定義され、$Y(x,\omega)e^{-i\omega t}$ は与えられた系を線形化したときのブロッホ波である。また、$V(x,\omega), W(x,\omega), \overline{W}(x,\omega)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$V(x,\omega) = e^{ikx}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(Y(x,\omega)e^{-ikx}\right), \tag{1.4a}$$

$$W(x,\omega) = e^{ikx}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(Y(x,\omega)e^{-ikx}\right) - i\chi(x,\omega)Y(x,\omega) \tag{1.4b}$$

$$\overline{W}(x,\omega) = e^{-ikx}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(Y^*(x,\omega)e^{ikx}\right) - i\chi(x,\omega)Y^*(x,\omega) \tag{1.4c}$$

但しゲージ補助関数 $\chi(x,\omega)$（複素数値もとり得る）は周期条件 $\chi(x+L)=\chi(x)$ を満たしているものとし、具体的な形は、逓減摂動法の $\varepsilon^3 e^{-i\omega t}$ の係数の比較から固定される。非線形の補正項の導入の仕方は、モデルがどのような非線形性を持つかに依存する。

展開 (1.2) の第1、2項をみればわかる通り、最低次に関する限りこれは波動 $y(x,t)$ がブロッホ波の変調であり、その包絡波は $U(\xi,\tau), \overline{U}(\xi,\tau)$ で与えられることを示しているただし $U(\xi,\tau)$ と $\overline{U}(\xi,\tau)$ は

$$\overline{U}(\xi,\tau) = U^*(\xi,\tau^*) \tag{1.5}$$

という関係があるものとものとする。また、定義からわかる通り $V(x,\omega), W(x,\omega), \overline{W}(x,\omega)$ はブロッホ波の $Y(x)$ と同じ関係式 (1.1) を満たしている。

それではなぜ、上のような展開(1.2)がでてききたのか?また変数τの中の補助関数$\chi(x)$は何なのか?実はこれらは、「線形波動」の議論から自然に導入できることなのである。詳しくは論文[1, 6]を参考にしていただきたい。さて、本論文の目的は、この解析法を周期的非線形格子系に適用することである[14]。もちろん周期は任意の自然数Nである。その意味でこれは、diatomic格子の研究[10, 11]の拡張とも考えることができる。まず次節では、系を線形化したときブロッホ波解が存在することを示す。第3節では、弱非線形波動を考える。そのために、(1.2)と同様の、摂動展開を行なう。結果を先にいうと、ブロッホ波の包絡波はNLS方程式に従うことが証明される。

2 周期格子のブロッホ波解

まず周期的「調和」格子を考える。運動方程式は次式で与えられる。

$$m_j\ddot{y}_j(t) = K_j\Big(y_{j+1}(t) - y_j(t)\Big) - K_{j-1}\Big(y_j(t) - y_{j-1}(t)\Big) \tag{2.1}$$

変数tは時間を表わし、j番目の格子の変位、質量はそれぞれy_j,m_jで、j番目と$j+1$番目の格子を結び付けるばね定数をK_jとした。m_jとK_jは次のような周期性を持つとする。

$$m_{j+N} = m_j \tag{2.2a}$$
$$K_{j+N} = K_j \tag{2.2b}$$

先ず次のような型の解を考えよう。

$$y_j(t) = Y_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + Y_j^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} \tag{2.3}$$

これを運動方程式に代入するとY_jに関して、2階の差分方程式が得られる。

$$-\omega^2 m_j Y_j = K_j(Y_{j+1} - Y_j) - K_{j-1}(Y_j - Y_{j-1}) \tag{2.4}$$

この2つの独立解を$Y_j^{(1)}$、$Y_j^{(2)}$として、

$$-\omega^2 m_j Y_j^{(1)} = K_j(Y_{j+1}^{(1)} - Y_j^{(1)}) - K_{j-1}(Y_j^{(1)} - Y_{j-1}^{(1)}) \tag{2.5a}$$
$$-\omega^2 m_j Y_j^{(2)} = K_j(Y_{j+1}^{(2)} - Y_j^{(2)}) - K_{j-1}(Y_j^{(2)} - Y_{j-1}^{(2)}) \tag{2.5b}$$

から$\omega^2 m_j$を消去すると、

$$K_j(Y_{j+1}^{(1)}Y_j^{(2)} - Y_j^{(1)}Y_{j+1}^{(2)}) = K_{j-1}(Y_j^{(1)}Y_{j-1}^{(2)} - Y_{j-1}^{(1)}Y_j^{(2)}) \tag{2.6}$$

が得られる。つまり、次式で定義される「ロンスキアン」W_jがjに依存しない事がわかる。

$$W_j \equiv K_j(Y_{j+1}^{(1)}Y_j^{(2)} - Y_j^{(1)}Y_{j+1}^{(2)}) \tag{2.7}$$

$Y_j^{(1)}$、$Y_j^{(2)}$の境界条件として

$$Y_0^{(1)} = Y_1^{(2)} = 0 \tag{2.8a}$$
$$Y_1^{(1)} = Y_0^{(2)} = 1 \tag{2.8b}$$

を採用する。$W_N = W_0$ と $K_N = K_0$ に注意すると次式を得る。

$$Y_{N+1}^{(1)} Y_N^{(2)} - Y_N^{(1)} Y_{N+1}^{(2)} = 1 \tag{2.9}$$

ところでK_jとm_jの周期性を考慮すると、Y_{j+N}はまた (2.4) を満たすので、$Y_{j+N}^{(1)}$ と $Y_{j+N}^{(2)}$はつぎのように$Y_j^{(1)}$ と $Y_j^{(2)}$の線形結合で現せられる。

$$\begin{pmatrix} Y_{j+N}^{(1)} \\ Y_{j+N}^{(2)} \end{pmatrix} = \widehat{M} \begin{pmatrix} Y_j^{(1)} \\ Y_j^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

ただし$\widehat{M}$はjに依存しない2×2 の行列で、モノドロミー行列と呼ばれている。境界条件 (2.8) から$\widehat{M}$の成分が次のように決まる。

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} Y_{N+1}^{(1)} & Y_N^{(1)} \\ Y_{N+1}^{(2)} & Y_N^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

したがって (2.9) からモノドロミー行列の行列式は直ちに

$$\det \widehat{M} = 1 \tag{2.12}$$

となる。さて、(c_1, c_2) をモノドロミー行列の固有列ベクトルとする；

$$(c_1, c_2) \widehat{M} = \lambda (c_1, c_2) \tag{2.13}$$

もちろん固有値をλとした。さらに「ブロッホ解」Y_j を次のように導入しよう。

$$Y_j = c_1 Y_j^{(1)} + c_2 Y_j^{(2)} \tag{2.14}$$

明らかにこれは

$$Y_{j+N} = \lambda Y_j \tag{2.15}$$

を満たす。モノドロミー行列の行列式が 1 であること (2.12) を利用すると、$\widehat{M}$の固有値は次のように求まる。

$$\lambda = \frac{1}{2}(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4}) \tag{2.16a}$$

$$\Delta = \mathrm{tr}\, \widehat{M} \tag{2.16b}$$

(2.16a) をみればわか通り $|\Delta| < 2$であればλ は複素数であり $|\lambda|^2 = 1$となるから、固有値λは

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kN} \tag{2.17}$$

と表される。ただし実定数kはすぐあとでわかる通り波数と呼ぶことができる、ブロッホ解の満足する式 (2.15) と (2.17) 比べてみると$Y_j = Y_j(\omega)$ に対して次の注目すべき関係式が成立する。

$$Y_{j+N}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kN} Y_j(\omega) \tag{2.18}$$

これはまさに(1.1)でx、$Y(x)$、Lをそれぞれj、$Y_j(\omega)$、Nに置換えた式他ならない。差分方程式(2.4)にブロッホ解を代入し、(2.18)を用いると、$Y_1 \sim Y_N$に対する次のような線形方程式が得られる。

$$\hat{L}(k,\omega)\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

ここで$N \times N$の行列$\hat{L}(k,\omega)$は次のように定義した。

$$\hat{L}(k,\omega) = \begin{pmatrix} D_1(\omega) & K_1 & & & & & K_N e^{-ikN} \\ K_1 & D_2(\omega) & K_2 & & \mathbf{0} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & K_{j-1} & D_j(\omega) & K_j & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & K_{N-2} & D_{N-1}(\omega) & K_{N-1} \\ K_N e^{+ikN} & & & & & K_{N-1} & D_N(\omega) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$D_j(\omega) = \omega^2 m_j - (K_j + K_{j-1}) \tag{2.21}$$

ただし$N = 2$に対しては

$$\hat{L}(k,\omega) = \begin{pmatrix} D_1(\omega) & K_1 + K_2 e^{-2ik} \\ K_1 + K_2 e^{+2ik} & D_2(\omega) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

である。Y_jのトリビアルな解を避けるためには$\hat{L}(k,\omega)$の行列式は0である必要がある。

$$\det \hat{L}(k,\omega) = 0 \tag{2.23}$$

これは波数kと角振動数ωを結び付ける分散関係ほかならない。一般に与えられた実数kに対してωの解は複数のbranchを持ち、それぞれは1つのバンド'band'に相当する。さらにもし$|\Delta(\omega)| > 2$であるなら波数kは複素数になるので、(2.18)からわかる通りY_jは空間的に不安定になる。いいかえるとωはギャップの中にある、といえる。$Y_j(\omega)\exp(-i\omega t)$は周期格子におけるブロッホ波そのものである。

3　非線形格子におけるブロッホ波の変調とソリトン

ここでは、周期系に対する逓減摂動法を非線形格子に適用する。まず格子波に関して次の2つの仮定を課する。

1) 振幅は十分小さい

2) 波動は、前節で導入したBloch波の非線形分散性による、時間空間的にゆっくりとした変調である。

j番目のばねの伸びをδとして、その力学ポテンシャルは

$$U_j(\delta) = \frac{1}{2}K_j\delta^2 + \frac{1}{4}K_j\beta_j\delta^4 + O(\delta^5) \tag{3.1}$$

で与えられるとする。但し定数β_jは周期性を満たす

$$\beta_{j+N} = \beta_j \tag{3.2}$$

すると格子の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} m_j\ddot{y}_j(t) = & K_j\left[\left(y_{j+1}(t) - y_j(t)\right) + \beta_j\left(y_{j+1}(t) - y_j(t)\right)^3\right] \\ & -K_{j-1}\left[\left(y_j(t) - y_{j-1}(t)\right) + \beta_{j-1}\left(y_j(t) - y_{j-1}(t)\right)^3\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

さて、上式で現せられる格子波y_jに対して、(1.2)の型の摂動展開を導入する。そのためにまず、(1.3)とまったく同様の独立変数を定義する。

$$\xi = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}j - t\right) \tag{3.4a}$$

$$\tau = \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}j + \chi_j\right) \tag{3.4b}$$

ただしゲージ補助関数$\chi_j = \chi_j(\omega)$は周期的であり$(\chi_{j+N} = \chi_j)$、具体的な形は、あとで決まる。摂動展開は次のように与える。

$$\begin{aligned} y_j(t) = & \varepsilon Y_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}U(\xi,\tau) + \varepsilon Y_j^*(\omega)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\overline{U}(\xi,\tau) \\ & +\varepsilon^2 V_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}(-\mathrm{i})\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial\xi} + \varepsilon^2 V_j^*(\omega)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\mathrm{i}\frac{\partial\overline{U}(\xi,\tau)}{\partial\xi} \\ & +\varepsilon^3 W_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}(-1)\frac{\partial^2 U(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} + \varepsilon^3\overline{W}_j(\omega)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}(-1)\frac{\partial^2\overline{U}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} \\ & +\varepsilon^3 X_j(\omega)\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega t}\left(U(\xi,\tau)\right)^3 + \varepsilon^3 X_j^*(\omega)\mathrm{e}^{+3\mathrm{i}\omega t}\left(\overline{U}(\xi,\tau)\right)^3 \\ & +O(\varepsilon^4) \end{aligned} \tag{3.5}$$

言うまでもなくξとτはブロッホ波$Y_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ のゆっくりとした変調を記述する変数であり、$U(\xi,\tau)$は包絡波である。V_j、W_j、$\overline{W}_j$は(1.4)のように定義した。

$$V_j(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kj}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(Y_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kj}\right) \tag{3.6a}$$

$$W_j(\omega) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kj}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(Y_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kj}\right) - \mathrm{i}\chi_j(\omega)Y_j(\omega) \tag{3.6b}$$

$$\overline{W}_j(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kj}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(Y_j^*(\omega)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kj}\right) + \mathrm{i}\chi_j(\omega)Y_j^*(\omega) \tag{3.6c}$$

$\overline{U}(\xi,\tau)$ と $U(\xi,\tau)$ の関係は、(1.5) で与えられた通り $\overline{U}(\xi,\tau)=U^*(\xi,\tau^*)$ である。U^3 や $\overline{U}^3$ を含む行は、非線形補正項である。

さて (3.5) を運動方程式 (3.3) に代入して $\varepsilon^n \exp -\mathrm{i}l\omega t$ の係数の比較をする。(ただし n は自然数 l は整数) この手続きは、通常の逓減摂動法とほぼ同じとみなせる。$(n,l)=(1,1)$ と (2,1) では式 (2.4) とその ω 微分がそれぞれ得られる。$(n,l)=(1,-1)$、$(2,-1)$ でも同様の結果となる。$(n,l)=(3,1)$ では次の方程式が得られる、

$$P_j\Big(\mathrm{i}U_\tau - U_{\xi\xi}\Big) + Q_j U^2 \overline{U} = 0。 \tag{3.7}$$

但し

$$P_j = -\mathrm{i}(K_j g_j Y_{j+1} - K_{j-1} g_{j-1} Y_{j-1}) \tag{3.8a}$$
$$Q_j = 3K_j\beta_j|Y_{j+1}-Y_j|^2(Y_{j+1}-Y_j) - 3K_{j-1}\beta_{j-1}|Y_j-Y_{j-1}|^2(Y_j-Y_{j-1}) \tag{3.8b}$$
$$g_j = \chi_{j+1} - \chi_j + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2} \tag{3.8c}$$

$\chi_{j+N}=\chi_j$ より直ちに

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_N = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}N \tag{3.9}$$

が成立する事をここで注意しておく。

さてこの段階ではまだ、χ_j がまだ決定されていない。したがって (3.8a) で与えられた P_j の具体型は未定である。ここで、j の関数として P_j は Q_j に比例する、と仮定しよう。

$$Q_j = bP_j \tag{3.10}$$

ただし b は定数。この式はいわば、χ_j を決めるゲージ固定の条件に相当する。(3.10) を具体的に書くと次のようになる。

$$\mathrm{S}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = \mathrm{i}b^{-1}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

ここで S は下に与えられる $N\times N$ の行列である。

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} K_1Y_2 & & & & & -K_NY_N\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kN} \\ -K_1Y_1 & K_2Y_3 & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -K_jY_j & K_jY_{j+1} & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -K_{N-1}Y_{N-1} & K_NY_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kN} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

まず(3.11)をg_jについて解いて、規格化条件(3.9)からbも求まる。さらに、例えば$\chi_0=0$とおく事によって、(3.8c)からχ_jが決定される。結果的に(3.7)と(3.10)より、包絡波に対する閉じた方程式

$$iU_\tau - U_{\xi\xi} + bU^2\overline{U} = 0 \tag{3.13}$$

つまりNLS方程式が得られた。ここで1つ注意したいことは、(3.13)の非線形項の係数bは実数となる、ということである。この証明はAPPENDIXAで行うことにする。

さて、τが実数なら(1.5)より$\overline{U}$はU^*に等しくなり、非線形シュレディンガー方程式(3.13)はよく知られているとおり、$b<0$のとき1ソリトン解

$$U = \sqrt{\frac{-2}{b}}A\,\mathrm{sech}\Big(A\xi + 2BA\tau\Big)\exp\Big\{iA\xi - i(A^2-B^2)\tau\Big\} \tag{3.14}$$

を持つ。ただしA, Bは実定数である。τが実数でなかったとしても、上の解をτの複素平面に解析接続したものは、(3.13)の解になっている。この事実は(1.5)で与えられた$\overline{U}$の定義に由来する。χ_jの周期性とτの定義(3.4b)から、(3.14)はj-空間でも、動く孤立波であることがわかる。さらに格子波y_jは(3.5)で与えられるが、これもまた孤立波である事がすぐわかる。つまりこれは、周期格子におけるソリトン現象他ならない。上に述べた解析接続は、任意の解析解にも適用できる。これはnソリトン現象が周期格子で観測できることを示している。

4 要旨と議論

先に導入された、周期系に対する「拡張された」逓減摂動法を周期的非線形格子に応用した。この方法で重要なポイントは3つある。第一に搬送波としてブロッホ波を採用したことである。つぎに(3.5)という形の、分散補正項を含む展開を導入することである。これは、線形波動の議論から自然と導かれることである。最後にゲージ関数χ_jである。これは、包絡波の非線形方程式を導くのに不可欠である。

結果的に、包絡波が非線形シュレディンガー方程式に従うことが示された。従って、ブロッホ波の包絡波としてソリトン現象が現れることがわかった。もちろん多ソリトン現象も、格子波として観測することができるであろう。非線形ばねのポテンシャルは、(3.1)という形をとると仮定したが、3次の項があったとしても、我々の方法は適用可能である。ただし、非線形の補正項を更に加えなければならなくなり、計算は繁雑になる。この場合同様に非線形シュレディンガー方程式が導かれるが、非線形の係数bが必ずしも実数になるとは限らないので、ソリトン現象が常に見受けられるとはいえない。それでは、bが実数となる必要十分条件はどうなるのか?これに関しては将来の研究として残しておく。

本論文では波数kが有限であると仮定したが、ゼロ端数極限ではおそらく包絡波としてKdV方程式が導かれると予想される[12, 13]。この場合も、今後の研究対象となるであろう。

APPENDIX A: (3.13)のbが実数である事の証明

定数bはNLS方程式(3.13)の、非線形項の係数であり、方程式(3.11)、(3.9)を通じて求める事ができる。例えば$N=2$の場合は容易に

$$b=\left(2\frac{\mathrm{d}k^2}{\mathrm{d}\omega^2}\sin 2k\right)^{-1}\left\{3K_1\beta_1|Y_1-Y_2|^2\left(2K_1^{-1}\cos 2k+\frac{D_1+D_2+2K_2}{K_1K_2}\right)\right.$$
$$\left.+3K_2\beta_2|Y_2-Y_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k}|^2\left(2K_2^{-1}\cos 2k+\frac{D_1+D_2+2K_1}{K_1K_2}\right)\right\} \quad (\mathrm{A.1})$$

となり、bが実数である事も直接わかる。(D_jは(2.21)で定義された。) 同様に$N=3$の場合もbが実数である。

$$b=\left(3\frac{\mathrm{d}k^2}{\mathrm{d}\omega^2}\sin 3k\right)^{-1}\times$$
$$\left[3K_1\beta_1|Y_1-Y_2|^2\left\{2K_1^{-1}\cos 3k-\frac{D_3(D_1+D_2+2K_1)-K_2^2-K_3^2}{K_1K_2K_3}\right\}\right.$$
$$+3K_2\beta_2|Y_2-Y_3|^2\left\{2K_2^{-1}\cos 3k-\frac{D_2(D_3+D_1+2K_2)-K_3^2-K_1^2}{K_1K_2K_3}\right\}$$
$$\left.+3K_3\beta_3|Y_3-Y_1\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}|^2\left\{2K_3^{-1}\cos 3k-\frac{D_1(D_2+D_3+2K_3)-K_1^2-K_2^2}{K_1K_2K_3}\right\}\right] \quad (\mathrm{A.2})$$

一般の$N(>3)$については、帰納法で証明する事にする。(3.12) で定義されたSの逆行列は

$$\left(\mathrm{S}^{-1}\right)_{ij}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma Nk}Y_j}{K_iY_iY_{i+1}\sin Nk} \quad (\mathrm{A.3})$$
$$\sigma=\begin{cases}+1 & (j\le i),\\ -1 & (j>i).\end{cases}$$

となり、(3.9)、(3.11)、(A.3) からbの値は次のようにあらわされる。

$$b=\left(N\sin Nk\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{N}3K_j\beta_j|Y_{j+1}-Y_j|^2(2K_j^{-1}\cos Nk-r_j^{(N)}) \quad (\mathrm{A.4})$$

但し$r_j^{(N)}$は次式で定義される。

$$r_j^{(N)}=r_j^{(N)}(K_j,\cdots,K_{j+N-1},D_j,\cdots,D_{j+N-1},k)$$
$$=(Y_{j+1}-Y_j)^2\left(\frac{1}{K_{j+1}Y_{j+1}Y_{j+2}}+\cdots+\frac{1}{K_{j+N-2}Y_{j+N-2}Y_{j+N-1}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kN}}{K_{j+N-1}Y_{j+N-1}Y_j}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Nk}$$
$$+\frac{1}{K_j}\left(\frac{Y_{j+1}}{Y_j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nk}+\frac{Y_j}{Y_{j+1}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Nk}\right) \quad (\mathrm{A.5})$$

(A.4)より直ちに、bが実数である事を証明するには、$r_j^{(N)}$が実数であることを示せば十分である。ここで注意すべきことが1つある。それは共通因子の自由度を残して$Y_j\sim Y_{j+N-1}$

が、$D_j \sim D_{j+N-1}$と$K_j \sim K_{j+N-1}$とkの関数として求まる、ということである。((2.19)を見よ) (2.2)と(2.18)を考えると式(2.19)は、次のように書き換えられる。

$$\widehat{L}' \begin{pmatrix} Y_j \\ \vdots \\ Y_{j+N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

ただし$N \times N$行列$\widehat{L}'$は

$$\widehat{L}' = \begin{pmatrix} D_j & K_j & & & & K_{j+N-1}e^{-ikN} \\ K_j & D_{j+1} & K_{j+1} & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & K_{j+N-3} & D_{j+N-2} & K_{j+N-2} \\ K_{j+N-1}e^{+ikN} & & & & K_{j+N-2} & D_{j+N-1} \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

と定義される。もし$D_{j+N-1} \neq 0$であるなら、(A.6)の中のY_{j+N-1}を消去する事ができて、次の式を得る。

$$\widehat{L}'' \begin{pmatrix} Y_j \\ \vdots \\ Y_{j+N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

ここで$(N-1) \times (N-1)$行列$\widehat{L}''$は以下のように定義される。

$$\widehat{L}'' = \begin{pmatrix} \widetilde{D}_j & K_j & & & & \widetilde{K}_{j+N-2}e^{-ikN} \\ K_j & D_{j+1} & K_{j+1} & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & K_{j+N-4} & D_{j+N-3} & K_{j+N-3} \\ \widetilde{K}_{j+N-2}e^{+ikN} & & & & K_{j+N-3} & \widetilde{D}_{j+N-2} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

ただし

$$\widetilde{K}_{j+N-2} \equiv -\frac{K_{j+N-2}K_{j+N-1}}{D_{j+N-1}} \tag{A.10}$$

$$\widetilde{D}_j \equiv D_j - K^2_{j+N-1}D^{-1}_{j+N-1} \tag{A.11}$$

$$\widetilde{D}_{j+N-2} \equiv D_{j+N-2} - K^2_{j+N-2}D^{-1}_{j+N-1} \tag{A.12}$$

(A.6)の中の最後の方程式を用いて、(A.5)に含まれるY_{j+N-1}を消去すると

$$\begin{aligned} r_j^{(N)} &= (Y_{j+1} - Y_j)^2 \left(\frac{1}{K_{j+1}Y_{j+1}Y_{j+2}} + \cdots + \frac{1}{K_{j+N-3}Y_{j+N-3}Y_{j+N-2}} + \frac{e^{-ikN}}{\widetilde{K}_{j+N-2}Y_{j+N-2}Y_j} \right) e^{+iNk} \\ &+ \frac{1}{K_j} \left(\frac{Y_{j+1}}{Y_j} e^{-iNk} + \frac{Y_j}{Y_{j+1}} e^{+iNk} \right) \end{aligned} \tag{A.13}$$

となる。ここで(A.5)、(A.7)をそれぞれ(A.13)、(A.9)と比べてみよう。(A.5)、(A.6)、(A.7)に対して以下の変換を施してみよう。

$$\begin{aligned} N &\rightarrow N-1 \\ k &\rightarrow \frac{N}{N-1}k \\ K_{j+N-2} &\rightarrow \widetilde{K}_{j+N-2} \\ D_j &\rightarrow \widetilde{D}_j \\ D_{j+N-2} &\rightarrow \widetilde{D}_{j+N-2} \end{aligned} \tag{A.14}$$

すると、(A.13)、(A.8)、(A.9)がそれぞれ再現する事がわかる、従って、われわれは次のような重要な関係式を得ることができた。

$$\begin{aligned} &r_j^{(N)}(K_j, \cdots, K_{j+N-1}, D_j, \cdots, D_{j+N-1}, k) \\ =&r_j^{(N-1)}(K_j, \cdots, K_{j+N-3}, \widetilde{K}_{j+N-2}, \widetilde{D}_j, D_{j+2}, \cdots, D_{j+N-3}, \widetilde{D}_{j+N-2}, \frac{N}{N-1}k) \end{aligned} \tag{A.15}$$

この関係式からわかることは、$r_j^{(N)}$が実数である事を示すためには$r_j^{(N-1)}(K_j, \cdots, K_{j+N-2}, D_j, \cdots, D_{j+N-2}, k)$が任意の実数$K_j \sim K_{j+N-2}$、$D_j \sim D_{j+N-2}$、$k$に対して実数である事を示せば十分である、ということである。関係式(A.15)は$N=3$場合、(A.1)、(A.2)から容易に確かめられる事を注意しておく。

さて、もし$D_{j+N-1}=0$の場合は、(A.6)の中のY_{j+N-1}とY_{j+N-2}を同時に消去する事ができて、次式を得る。

$$\widehat{L}''' \begin{pmatrix} Y_j \\ \vdots \\ Y_{j+N-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

ここで$(N-2)\times(N-2)$行列$\widehat{L}'''$は

$$\widehat{L}''' = \begin{pmatrix} \widehat{D}_j & K_j & & & & \widehat{K}_{j+N-2}e^{-ikN} \\ K_j & D_{j+1} & K_{j+1} & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & K_{j+N-5} & D_{j+N-4} & K_{j+N-4} \\ \widehat{K}_{j+N-3}e^{+ikN} & & & & K_{j+N-4} & D_{j+N-3} \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

である。ただし

$$\widehat{K}_{j+N-3} \equiv -\frac{K_{j+N-3}K_{j+N-1}}{K_{j+N-2}}, \tag{A.18}$$

$$\widehat{D}_j \equiv D_j + \left(\frac{K_{j+N-1}}{K_{j+N-2}}\right)^2 D_{j+N-2} \tag{A.19}$$

この場合は、(A.5) は

$$
\begin{aligned}
&r_j^{(N)} \\
=&(Y_{j+1}-Y_j)^2\left(\frac{1}{K_{j+1}Y_{j+1}Y_{j+2}}+\cdots+\frac{1}{K_{j+N-4}Y_{j+N-4}Y_{j+N-3}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kN}}{\widehat{K}_{j+N-3}Y_{j+N-3}Y_j}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Nk} \\
&+\frac{1}{K_j}\left(\frac{Y_{j+1}}{Y_j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nk}+\frac{Y_j}{Y_{j+1}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Nk}\right) \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

と変形ができる。従って、前者と同様に次の関係式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&r_j^{(N)}(K_j,\cdots,K_{j+N-1},D_j,\cdots,D_{j+N-1},k) \\
=&r_j^{(N-2)}(K_j,\cdots,K_{j+N-4},\widehat{K}_{j+N-3},\widehat{D}_j,D_{j+1},\cdots,D_{j+N-4},D_{j+N-3},\frac{N}{N-2}k) \qquad \text{(A.21)}
\end{aligned}
$$

ゆえに、$r_j^{(N)}$が実数である事を証明するには、$r_j^{(N-2)}(K_j,\cdots,K_{j+N-3},D_j,\cdots,D_{j+N-3}\ ,k)$が任意の実数$K_j\sim K_{j+N-3}$、$D_j\sim D_{j+N-3}$、$k$ に対して実数であれば良い。

さて、変換 (A.15) あるいは (A.21) をくり返す事によって、$r_j^{(N)}$の実数性の証明は、$r_j^{(2)}$あるいは$r_j^{(3)}$に対するものに還元できる。既に見た通り、(A.1) と (A.2) から、$r_j^{(2)}$あるいは$r_j^{(3)}$ は任意の実数D_1,D_2,K_1,K_2あるいはD_1,D_2,D_3,K_1,K_2,K_3に対して、実数である。従って、$r_j^{(N)}$ が実数であること証明された。

最後に (A.4) に注意すると、bが実数であることがわかる。

参考文献

[1] 飯塚剛、京大数理解析研講究録 886(1994)p6.

[2] 例えば T. Iizuka and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. **61**(1992)3077.

[3] 例えば H.Ono, J. Phys. Soc. Jpn. **32**(1972)332, **37**(1974)882.

[4] 例えば M.Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. **59**(1990)4201.

[5] 例えば T.Y.Wu, J. Fluid Mech. **184**(1987)75.

[6] T. Iizuka, J.Phys.Soc.Jpn. **63**(1994)4343.

[7] Wei Chen and D.L.Mills, Phys. Rev. Lett. **58**(1987)160.

[8] J.E. Sipe and Herbert G. Winful, Opt. Lett. **13**(1988)132.

[9] C.Martijin de Sterke and J.E.Sipe, Phys. Rev. A **38**(1988)5149.

[10] S. Pnevmatikos, N. Flytzanis, ans M. Remoissenet, Phys. Rev. B **33**(1986) 2308.

[11] A. Campa, A. Giansanti, A. Tenenbaum, D. Levi and O. Ragnisco, Phys. Rev. B **48** (1993) 10168.

[12] N. Yajima and J. Satsuma, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 370.

[13] N. Sugimoto, J. Fluid Mech **244**(1992)55. N.Sugimoto, Jpn.Soc.Mechanical Engineers (1993) 284.

[14] T. Iizuka, preprint